2016年　東大数学　文系 第1問

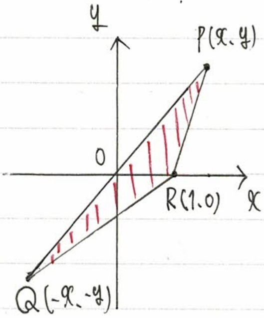
$\triangle PQR$が鋭角三角形になる

⇕

点P.Q.Rが三角形をなす（条件①）

かつ

$\triangle PQR$が鋭角三角形になる（条件②）



条件①

ⓐ 3点のうち、どの2点を選んでも同一の点はない。

ⓑ 3点が、同一直線上にない。

ⓐ $\Leftrightarrow$ $(x, y) \neq (0, 0)$ かつ $(x, y) \neq (1, 0)$ かつ $(x, y) \neq (-1, 0)$

ⓑ $\Leftrightarrow$ $y \neq 0$　　ⓐが全て $y \neq 0$ をみたす

よって条件1 $\Leftrightarrow$ ⓐかつ ⓑ は $y \neq 0$

条件②

鋭角三角形の定義は「最大角が鋭角である。」

今回は$\angle P$、$\angle Q$、$\angle R$のどれが最大かわからないので、

$\angle P$が鋭角 かつ $\angle Q$が鋭角 かつ $\angle R$が鋭角

とする。

座標上で鋭角を示すための技術は

- 余弦定理で示す　← 解法1
- ベクトルの内積で示す。　← 解法2

解法1. 余弦定理

一般に、$\triangle ABC$ の$\angle A$が鋭角

$\Leftrightarrow \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} > 0$　　分子だけとり出す

$\Leftrightarrow b^2+c^2 > a^2$

なので、

$\triangle PQR$において、

$$\begin{cases} \angle P < 90^\circ \Leftrightarrow PQ^2+PR^2 > QR^2 \\ \angle Q < 90^\circ \Leftrightarrow QP^2+QR^2 > PR^2 \\ \angle R < 90^\circ \Leftrightarrow RP^2+RQ^2 > PQ^2 \end{cases}$$

$P(x, y)$ $Q(-x, -y)$ $R(1, 0)$を利用して、

$PQ^2=4(x^2+y^2)$　$QR^2=(x+1)^2+y^2$　$RP^2=(x-1)^2+y^2$ を代入すると、3式は

$$\begin{cases} 4(x^2+y^2)+(x-1)^2+y^2 > (x+1)^2+y^2 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 > \frac{1}{4} & —Ⓐ \\ 4(x^2+y^2)+(x+1)^2+y^2 > (x-1)^2+y^2 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2 > \frac{1}{4} & —Ⓑ \\ (x-1)^2+y^2+(x+1)^2+y^2 > 4(x^2+y^2) \Leftrightarrow x^2+y^2 < 1 & —Ⓒ \end{cases}$$

解法2. ベクトルの内積

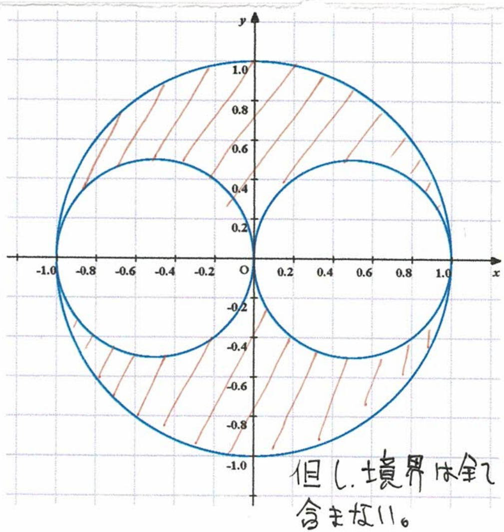
$P(x, y)$　$Q(-x, -y)$　$R(1, 0)$ より

$\overrightarrow{PQ}=(-2x, -2y)$　$\overrightarrow{PR}=(1-x, -y)$　$\overrightarrow{QR}=(1+x, y)$ である。

$$\begin{cases} \angle P < 90^\circ \Leftrightarrow \cos P > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}|\cdot|\overrightarrow{PR}|} > 0 \\ \angle Q < 90^\circ \Leftrightarrow \cos Q > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QP}||\overrightarrow{QR}|} > 0 \\ \angle R < 90^\circ \Leftrightarrow \cos R > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}}{|\overrightarrow{RP}|\cdot|\overrightarrow{RQ}|} > 0 \end{cases}$$

この3式にベクトルの成分を代入して整理すると、解法1と同じ条件が得られる。

条件①かつ条件②を図示すると、



但し、境界は全て含まない。